

Polynomdarstellungen von Polyedern

Martin Henk*

1 Einleitung/Motivation

Eine der erfolgreichsten Strategien zum Lösen von kombinatorischen Optimierungsproblemen ist der polyedrische Ansatz. Dabei wird dem kombinatorischen Optimierungsproblem ein Polytop zugeordnet, das sich aus der konvexen Hülle der zulässigen Lösungen des Problems ergibt. Eine solche Darstellung eines Polytops als konvexe Hülle von endlich vielen Punkten bezeichnet man als \mathcal{V} -Darstellung. Um nun Algorithmen zur Lösung von (eventuell auch ganzzahligen) linearen Optimierungsproblemen auf dieses Polytop anwenden zu können, bedarf es jedoch, vereinfacht ausgedrückt, einer \mathcal{H} -Darstellung des Polytops, d.h. einer Beschreibung des Polytops als Lösungsmenge eines linearen Ungleichungssystems (siehe z.B. [GLS93, Sch98]).

Bei diesem Wechsel der Darstellungen treten nun mehrere Probleme auf. Zum Beispiel kennt man für viele kombinatorische Optimierungsprobleme keine vollständigen Beschreibungen durch lineare Ungleichungen. Oder aber es sind einfach zu viele Ungleichungen, die benötigt werden. Betrachtet man etwa das reguläre n -dimensionale Kreuzpolytop $C_n^* = \text{conv}\{\pm e_i : 1 \leq i \leq n\}$, gegeben als konvexe Hülle der $2n$ Einheitsvektoren $\pm e_i \in \mathbb{R}^n$, so sind in einer \mathcal{H} -Darstellung 2^n , und somit exponentiell viele lineare Ungleichungen notwendig:

$$C_n^* = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \dots + \varepsilon_n x_n \leq 1, \varepsilon_i \in \{-1, 1\}, 1 \leq i \leq n\}.$$

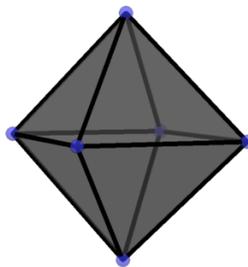


Abbildung 1: Kreuzpolytop (Oktaeder) C_3^*

Erlaubt man jedoch nicht nur lineare Ungleichungen in der Beschreibung, sondern lässt man z.B. die Betragsfunktion zu, so kann man das Kreuzpolytop offensichtlich auch nur

*Teilweise gefördert durch die DFG-Forschergruppe 468 „Methods from Discrete Mathematics for the Synthesis and Control of Chemical Processes“

durch eine Ungleichung beschreiben:

$$C_n^* = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_1| + \dots + |x_n| \leq 1\}.$$

Dieses triviale Beispiel soll lediglich veranschaulichen, dass die Anzahl der Ungleichungen, die zur Beschreibung eines Polytops notwendig sind, stark von dem erlaubten Typ der Ungleichungen abhängt. In diesem Artikel möchten wir übersichtsartig vorstellen, was bekannt und leider auch unbekannt ist, wenn bei der Darstellung nicht nur lineare Ungleichungen, sondern Polynomungleichungen von höherem Grad erlaubt sind.

Grundlage und Motivation dieser Untersuchungen ist ein fundamentaler Satz von Bröcker und Scheiderer aus der reellen algebraischen Geometrie. In dem Spezialfall von Polytopen bzw. Polyedern sagt er insbesondere aus, dass jedes Polyeder durch höchstens $n(n+1)/2$ Polynomungleichungen dargestellt werden kann. Bemerkenswert hierbei ist, dass die Anzahl der notwendigen Polynomungleichungen unabhängig ist von geometrischen/kombinatorischen Größen des Polyeders, wie etwa Anzahl der Ecken oder Facetten, inneren oder äußeren Winkeln usw. Wie jedoch nicht anders zu erwarten, spiegelt sich diese geometrische/kombinatorische Komplexität des Polyeders im Grad der Polynome wider. Das Resultat von Bröcker und Scheiderer ist rein existenzieller Natur. Eine erste offensichtliche Frage ist daher:

Wie konstruiert man explizit wenige Polynomungleichungen, die ein Polyeder beschreiben?

Selbst für ein so einfaches Objekt wie das Kreuzpolytop C_n^* (siehe Abbildung 1) kennen wir keine Beschreibung mit wenigen Polynomungleichungen. Basierend auf den Arbeiten von Bosse [Bos03, Bos05] und Bosse, Henk und Grötschel [BGH05] stellen wir in Abschnitt 4 ein Verfahren vor, das $2n$ Polynomungleichungen konstruiert, die ein gegebenes n -dimensionales Polyeder beschreiben. Die Anzahl der Polynomungleichungen ist hier sogar nur linear in der Dimension. Allerdings ist nicht bekannt, ob die Anzahl $2n$ bestmöglich ist. Für Polytope, also beschränkte Polyeder, reichen $2n-1$ Polynomungleichungen, und es liegt nahe zu vermuten, dass sich jedes Polytop durch n Polynome beschreiben lässt. Für $n=2$ wurde dies bereits von Bernig [Ber98] in konstruktiver Weise gezeigt. In Abschnitt 3 werden wir auf diese Konstruktion eingehen und diskutieren, warum sich dieser Ansatz nicht unmittelbar auf höhere Dimensionen verallgemeinern lässt. Abschnitt 2 enthält eine Übersicht der bekannten Eigenschaften von Polynomdarstellungen von Polyedern. Unser Wissen über solche Darstellungen ist jedoch noch sehr begrenzt.

Der Grad der Polynome bei einer Darstellung mit wenigen Polynomungleichungen wird im Allgemeinen sehr hoch sein. Trotz der gerade in jüngster Zeit erzielten beachtlichen Fortschritte beim Lösen von Polynomgleichungssystemen (siehe z.B. [BPR06, Las04, Par03]), bietet dieser Ansatz daher auf den ersten Blick keine praktikable Methode um reale Optimierungsprobleme zu lösen. Unser Ziel ist es auch vielmehr zu verstehen, wie die Anzahl der benötigten Polynome in einer Beschreibung eines Polyeders vom Maximalgrad der verwendeten Polynome abhängt. Dies führt zu sehr spannenden geometrischen und algebraischen Fragestellungen, und wir erhoffen uns dadurch auch, Polynomgleichungssysteme mit möglichst wenigen Polynomen und moderatem Grad konstruieren zu können, die dann wiederum algorithmisch handhabbar(er) sind.

Die Entwicklung solcher Polynomgleichungssysteme mit vorgegebenem Maximalgrad, die ein Polyeder oder allgemeinere Mengen genau darstellen oder gut approximieren, ist Teil eines Forschungsprojektes innerhalb der DFG-Forschergruppe 468 „Methods from Discrete Mathematics for the Synthesis and Control of Chemical Processes“ an der Otto-von-

Guericke Universität Magdeburg. Die hier vorgestellten Resultate sind ein erster Schritt auf dem Weg zur Entwicklung solcher hierarchischen Systeme.

2 Semi-algebraische Mengen und Polyeder

Ein *Polyeder* $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ist der Durchschnitt von endlich vielen abgeschlossenen Halbräumen, d.h. es kann dargestellt werden als

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : b_i - a_i x \geq 0, 1 \leq i \leq m\}, \quad (2.1)$$

mit $a_i \in \mathbb{R}^n$, $b_i \in \mathbb{R}$. Beschränkte Polyeder heißen *Polytope*, und vom Standpunkt der reellen algebraischen Geometrie sind Polyeder sehr spezielle *elementare abgeschlossene semi-algebraische Mengen*. Allgemein versteht man unter einer elementaren abgeschlossenen semi-algebraischen Menge die Lösungsmenge von endlich vielen schwachen Polynomungleichungen, d.h. sie kann dargestellt werden als

$$S(f_1, \dots, f_l) = \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) \geq 0, 1 \leq i \leq l\},$$

wobei $f_i \in \mathbb{R}[x]$ Polynome sind. Ersetzt man die schwachen Ungleichungen durch strenge Ungleichungen, d.h. \geq wird durch $>$ ersetzt, dann heißt S *elementare offene semi-algebraische Menge*. Nach fundamentalen Resultaten von Bröcker und Scheiderer (siehe [Brö84, Sch89, Brö91, BM98], [BCR98, Theorem 6.5.1, Theorem 10.4.8]) besitzen elementare semi-algebraische Mengen Darstellungen mit wenigen Polynomungleichungen. Vereinfacht lassen sich diese Resultate in dem folgenden Satz subsumieren:

Satz 2.1 (Bröcker, Scheiderer). *Jede elementare abgeschlossene semi-algebraische Menge $S(f_1, \dots, f_l)$ kann durch höchstens $n(n+1)/2$ Polynome dargestellt werden, d.h. es gibt Polynome $g_1, \dots, g_{n(n+1)/2} \in \mathbb{R}[x]$ mit*

$$S(f_1, \dots, f_l) = S(g_1, \dots, g_{n(n+1)/2}).$$

Im Falle von elementaren offenen semi-algebraischen Mengen kann die Schranke $n(n+1)/2$ durch n ersetzt werden, und beide Schranken sind bestmöglich.

Der positive Orthant $\{x \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, 1 \leq i \leq n\}$ zeigt, dass im offenen Fall die Schranke n im Allgemeinen nicht verbessert werden kann (z.B. [BCR98, Theorem 6.5.11]). Extremale Beispiele im abgeschlossenen Fall sind geometrisch komplexer (z.B. [BCR98, Proposition 10.4.7]) und insbesondere sind sie nicht konvex. Ob für konvexe elementare abgeschlossene semi-algebraische Mengen bessere Schranken existieren, ist offen. Eine zentrale Fragestellung im Zusammenhang mit dem Satz von Bröcker und Scheiderer ist die Konstruierbarkeit dieser wenigen Polynome $g_1, \dots, g_{n(n+1)/2}$. Alle bekannten Beweise des Satzes sind nicht-konstruktiv. Für weitere Informationen über diesen Satz und Verallgemeinerungen verweisen wir auf [ABR96, BCR98]. Hier sind wir vorrangig nur an den Konsequenzen von Satz 2.1 und an seiner konstruktiven Umsetzbarkeit im Zusammenhang mit Polyedern interessiert.

Dazu beschränken wir uns im Folgenden auf n -dimensionale, also volldimensionale Polyeder im \mathbb{R}^n . In Analogie zu den anfangs erwähnten \mathcal{V} - und \mathcal{H} -Darstellungen von Polytopen/Polyedern verstehen wir unter einer \mathcal{P} -Darstellung eines Polyeders $P \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Menge von endlich vielen Polynomen $p_1, \dots, p_l \in \mathbb{R}[x]$, so dass

$$P = S(p_1, \dots, p_l).$$

Insbesondere ist jede \mathcal{H} -Darstellung von P auch eine \mathcal{P} -Darstellung. Für ein gegebenes Polyeder P bezeichne

$$m_{\mathcal{P}}(P) = \min\{l \in \mathbb{N} : P = S(p_1, \dots, p_l), p_i \in \mathbb{R}[x]\}$$

die *minimale Anzahl von Polynomen* in einer \mathcal{P} -Darstellung. Es ist nicht schwierig zu sehen, dass für n -dimensionale Polytope P mindestens n Polynomungleichungen nötig sind, d.h. $m_{\mathcal{P}}(P) \geq n$. Um diesen Sachverhalt etwas allgemeiner zu formulieren, benutzen wir ein paar grundlegende Begriffe aus der Polyedertheorie, für die wir, als auch für im weiteren verwendete Begriffe, auf [MS71, Zie95] verweisen.

Eine Hyperebene $H(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n : b - ax = 0\}$, $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$, heißt *Stützhyperebene* des Polyeders (2.1) falls

$$P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : b - ax \geq 0\} \quad \text{und} \quad P \cap H(a, b) \neq \emptyset.$$

Der Vektor a heißt *äußerer Normalenvektor* der Stützhyperebene, bzw. $-a$ heißt *innerer Normalenvektor*. Für eine Stützhyperebene $H(a, b)$ heißt der Durchschnitt $F = P \cap H(a, b)$ *Seite* von P , genauer k -Seite von P , falls $\dim F = k$. Hierbei versteht man unter der Dimension der Seite F die Dimension ihrer affinen Hülle, bezeichnet mit $\text{aff} F$. 0-Seiten heißen *Ecken*, 1-Seiten *Kanten*, und für ein n -dimensionales Polyeder heißen die $(n-1)$ -Seiten *Facetten*. Insbesondere ist der Rand eines Polyeders P die Vereinigung seiner Facetten, und daher nehmen wir stets an, dass die Ungleichungen $b_i - a_i x \geq 0$ in einer Darstellung (2.1) Facetten-definierende Ungleichungen von P sind, d.h. $H(a_i, b_i) \cap P$ ist eine Facette für $1 \leq i \leq m$.

Eine k -Seite eines Polyeders ist in mindestens $n-k$ vielen Facetten enthalten. Ein analoger Sachverhalt gilt auch im Zusammenhang mit \mathcal{P} Darstellungen.

Proposition 2.2 ([GH03, Proposition 2.1]). *Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ein n -dimensionales Polyeder, und sei $S(p_1, \dots, p_l)$ eine \mathcal{P} -Darstellung von P . Weiterhin sei F eine k -dimensionale Seite von P , $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Dann existieren $n-k$ Polynome $p_{j_i} \in \{p_1, \dots, p_l\}$, $1 \leq i \leq n-k$, die auf $\text{aff} F$ verschwinden, d.h.*

$$\text{aff} F \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : p_{j_i}(x) = 0, 1 \leq i \leq n-k\}. \quad (2.2)$$

Somit ist $m_{\mathcal{P}}(P) \geq n$ für jedes Polyeder, das eine Ecke hat. Ist andererseits F eine Facette von P , und ist $\text{aff} F = \{x \in \mathbb{R}^n : b - ax = 0\}$, dann impliziert Proposition 2.2, dass $b - ax$ Faktor eines Polynoms in der \mathcal{P} -Darstellung sein muss. Dies bedeutet aber auch, dass die Summe der Grade der Polynome in einer \mathcal{P} -Darstellung mindestens gleich der Anzahl der Facetten ist. Eine \mathcal{P} -Darstellung des Kreuzpolytops C_n^* mit zum Beispiel n^2 vielen Polynomen, dessen Existenz durch Satz 2.1 gesichert ist, benötigt also mindestens ein Polynom vom Grad nicht kleiner als $2^n/n^2$.

Es sei bemerkt, dass für \mathcal{H} -Darstellungen Gleichheit in (2.2) verlangt werden kann. Für \mathcal{P} -Darstellungen gilt dies im Allgemeinen nicht, wie das folgende triviale Beispiel eines *Würfels*

$$C_n = \{x \in \mathbb{R}^n : -1 \leq x_i \leq 1, 1 \leq i \leq n\} = \{x \in \mathbb{R}^n : (x_i)^2 \leq 1, 1 \leq i \leq n\}$$

zeigt. Für die Facette $F = C_n \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 1\}$ ist $\text{aff} F \subsetneq \{x \in \mathbb{R}^n : (x_n)^2 = 1\}$.

Ein weiteres einfaches Beispiel für ein Polytop P , das sich mit n Polynomungleichungen beschreiben lässt, ist ein n -dimensionales Simplex T_n . Da $m_{\mathcal{P}}(P)$ invariant ist unter regulären affinen Transformationen, dürfen wir annehmen, dass T_n das sogenannte *Standard-Simplex* ist, d.h.

$$T_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, 1 \leq i \leq n, \sum_{i=1}^n x_i \leq 1 \right\}.$$

Geht man nun über zu quadratischen Polynomungleichungen, so lässt sich eine Ungleichung einsparen, und man erhält etwa folgende Beschreibung

$$T_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x_i \left(1 - \sum_{j=i}^n x_j \right) \geq 0, 1 \leq i \leq n \right\}.$$

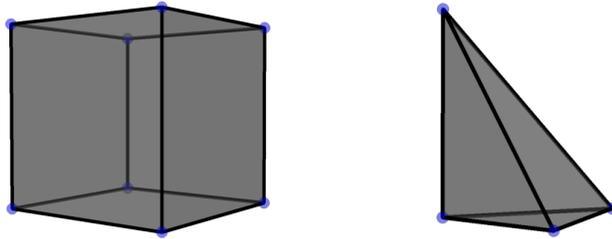


Abbildung 2: Würfel C_3 und Standard-Simplex T_3

Eine Möglichkeit diese \mathcal{P} -Darstellung von T_n zu verifizieren, ist mittels Induktion, da T_k rekursiv als Pyramide mit Spitze e_k und Basis T_{k-1} definiert werden kann. Diese Betrachtungsweise führt dann unmittelbar zu einer (konstruktiven) \mathcal{P} -Darstellung von Pyramiden, oder auch Prismen, mit Hilfe der Basis des entsprechenden Polytops:

Proposition 2.3 ([GH03, Proposition 2.3]). *Sei $P \subset \mathbb{R}^n$ eine Pyramide oder ein Prisma mit $(n - 1)$ -dimensionaler Basis Q . Dann gilt*

$$m_{\mathcal{P}}(P) = m_{\mathcal{P}}(Q) + 1.$$

Für Doppelpyramiden, wie zum Beispiel das Kreuzpolytop C_n^* , kennen wir keinen solchen Zusammenhang zwischen einer \mathcal{P} -Darstellung der Basis und einer \mathcal{P} -Darstellung des Polytops.

Die \mathcal{P} -Darstellung eines Simplex lässt sich aber auch in eine andere Richtung verallgemeinern, nämlich auf beliebige Polyeder $P \subset \mathbb{R}^n$ mit $n + 1$ Facetten und einer Ecke. Auch in diesem etwas allgemeineren Fall findet man immer eine Darstellung mit n Polynomen vom Maximalgrad 2. Wendet man nun diese Art der Substitution von linearen Ungleichungen durch quadratische Ungleichungen auf ein beliebiges Polyeder an, so sieht man, dass für ein Polyeder $P \subset \mathbb{R}^n$ mit m Facetten beim Übergang zu quadratischen Ungleichungen mindestens $\lfloor m/(n + 1) \rfloor$ Ungleichungen eingespart werden können. Das Problem, die minimale Anzahl von Polynomen mit vorgegebenem Maximalgrad p (auch im Falle $p = 2$) zu bestimmen, die ein Polyeder mit m -Facetten beschreiben, ist offen. In Dimension 2 haben wir zumindest für $p \in O(m/\log m)$ ein bestmögliches Resultat:

Satz 2.4 ([HM06]). *Jedes konvexe Polygon $P \subset \mathbb{R}^2$ mit m Kanten besitzt eine \mathcal{P} -Darstellung mit höchstens*

$$\left\lceil \frac{m-p}{p} \right\rceil + \lceil \log_2 p \rceil + 1$$

Polynomen mit Maximalgrad $\leq p$.

Da aufgrund von Proposition 2.2 die Anzahl der Polynome in einer \mathcal{P} -Darstellung durch $\lceil m/p \rceil$ von unten beschränkt ist, ist die obige Aussage für $p \in O(m/\log m)$ im Wesentlichen optimal. Der Beweis dieser Schranke beruht auf einer sehr expliziten 2-dimensionalen Konstruktion, die sich nicht auf höhere Dimensionen verallgemeinern lässt.

Beim Untersuchen bzw. Konstruieren von \mathcal{P} -Darstellungen erweist es sich oft als nützlich, zunächst nur beschränkte Polyeder, also Polytope, zu betrachten. Dies ist keine wesentliche Einschränkung, da man jedes Polyeder, welches eine Ecke besitzt, mittels einer regulären projektiven Transformation in eine beschränkte Menge überführen kann. Diese Vorgehensweise soll an einem einfachen Beispiel illustriert werden: Sei

$$P = \{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 : 2 - x \geq 0, 2 + x \geq 0, 2 - x - 2y \geq 0, 2 + x - 2y \geq 0\}$$

ein unbeschränktes Polygon in der Dimension 2. Mittels der projektiven Transformation $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y)^\top : y = 2\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y)^\top : y = -1\}$ mit $f(x, y) = \frac{1}{-y+2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ wird P auf die Menge

$$P' = \{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 \setminus \{y = -1\} : |x| + |y| \leq 1\}$$

abgebildet. Die unendlichen fernen Punkte in P werden dabei gerade auf den Punkt $(0, -1)^\top$ abgebildet, der nicht zu P' gehört.

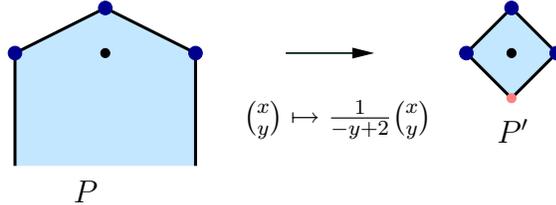


Abbildung 3: $f(P)$

Wir betrachten nun den Abschluss von P' , d.h. den sogenannten Diamanten

$$C_2^* = \{(x, y)^\top : -1 \leq x + y \leq 1, -1 \leq x - y \leq 1\}$$

und bestimmen dafür eine \mathcal{P} -Darstellung. Eine etwas ungeschickte \mathcal{P} -Darstellung von C_2^* ist die folgende:

$$C_2^* = \{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 : (1 - (x + y)^2)(1 - (x - y)^2) \geq 0, 1 - x^4 - y^2 \geq 0\}. \quad (2.3)$$

Dass dieses eine \mathcal{P} -Darstellung von C_2^* ist, wird im nächsten Abschnitt ersichtlich; warum sie ungeschickt ist, sehen wir gleich. Für P' ergibt sich so die Darstellung

$$P' = \{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 \setminus \{y = -1\} : (1 - (x + y)^2)(1 - (x - y)^2) \geq 0, 1 - x^4 - y^2 \geq 0\}.$$

Als nächstes transformieren wir diese Darstellung von P' zurück auf unser ursprüngliches unbeschränktes Polygon P und erhalten nach anschließender Multiplikation der Ungleichungen mit $(-y + 2)^4$

$$P = \left\{ (x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 \setminus \{y = 2\} : (2 - x)(2 + x)(2 - x - 2y)(2 + x - 2y) \geq 0, \right. \\ \left. (y - 2)^4 - x^4 - y^2(-y + 2)^2 \geq 0 \right\}.$$

Da für alle Punkte aus P insbesondere $1 - y \geq 0$ gilt, kann die in der obigen Beschreibung implizit enthaltene Ungleichung $y \neq 2$ durch $1 - y \geq 0$ ersetzt werden. Es ergibt sich so eine \mathcal{P} -Darstellung von P mit drei Ungleichungen:

$$P = \left\{ (x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 : (2 - x)(2 + x)(2 - x - 2y)(2 + x - 2y) \geq 0, \right. \\ \left. (y - 2)^4 - x^4 - y^2(-y + 2)^2 \geq 0, 1 - y \geq 0 \right\}.$$

Auf die zusätzliche lineare Ungleichung $1 - y \geq 0$ kann auch nicht verzichtet werden, da der Punkt $(0, 2)^\top$ die beiden anderen Ungleichungen erfüllt, aber nicht in P liegt. Ersetzt man jedoch in der \mathcal{P} -Darstellung von C_2^* die Ungleichung $1 - x^4 - y^2 \geq 0$ durch den Kreis $1 - x^2 - y^2 \geq 0$, dann erhält man eine \mathcal{P} -Darstellung von P mit zwei Ungleichungen:

$$P = \left\{ (x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 : (2 - x)(x + 2)(2 - x - 2y)(2 + x - 2y) \geq 0, (y - 2)^2 - x^2 - y^2 \geq 0 \right\}.$$

Insofern war die ursprüngliche \mathcal{P} -Darstellung von C_2^* ungeschickt gewählt. Ob man im Allgemeinen stets auf die zusätzliche lineare Ungleichung verzichten kann, die formal bei solch einer projektiven Transformation entsteht, ist offen. Somit ist nur bekannt

Proposition 2.5 ([GH03, Proposition 2.5]). *Sei $m_{\mathcal{P}}(n)$ die minimale Anzahl von Polynomen mit der jedes n -dimensionale Polytop $P \subset \mathbb{R}^n$ dargestellt werden kann, und sei $\overline{m}_{\mathcal{P}}(n)$ die analoge Größe für die Klasse der n -dimensionalen Polyeder. Dann gilt*

$$m_{\mathcal{P}}(n) \leq \overline{m}_{\mathcal{P}}(n) \leq m_{\mathcal{P}}(n) + 1.$$

Wie anfangs erwähnt, impliziert der Satz von Bröcker und Scheiderer die Schranken $m_{\mathcal{P}}(n), \overline{m}_{\mathcal{P}}(n) \leq n(n + 1)/2$. In Abschnitt 4 werden wir eine auf Bosse [Bos03] zurückgehende Konstruktion vorstellen, die für jedes Polytop eine \mathcal{P} -Darstellung mit höchstens $2n - 1$ Polynomen, also nur linear vielen, bestimmt. Unsere Ausführungen beruhen dabei auf der Arbeit [BGH05], die eine kompaktere Darstellung dieser Konstruktion enthält.

Satz 2.6 ([Bos03, BGH05]). *Es ist $m_{\mathcal{P}}(n) \leq 2n - 1$, und für jedes n -dimensionale Polytop kann eine \mathcal{P} -Darstellung mit höchstens $2n - 1$ Polynomen konstruktiv bestimmt werden.*

In Dimension 2 reichen im beschränkten wie im unbeschränkten Falle zwei Polynome.

Satz 2.7 (Bernig [Ber98]). *Es ist $m_{\mathcal{P}}(2) = \overline{m}_{\mathcal{P}}(2) = 2$, und für jedes Polygon kann eine \mathcal{P} -Darstellung mit 2 Polynomen konstruktiv bestimmt werden.*

Die Konstruktion aus Satz 2.6 lässt sich auch algorithmisch umsetzen, jedoch ist ihre Komplexität extrem hoch [Bos05]. Weiterhin sei bemerkt, dass konstruktive \mathcal{P} -Darstellungen von Polytopen/Polyedern auch auf elementare abgeschlossene semi-algebraische Mengen mit

vorgegebenem Maximalgrad p angewendet werden können. Dazu substituiert man jedes Monom in einem Polynom der gegebenen semi-algebraischen Menge durch eine neue lineare Variable und überführt so die semi-algebraische Menge in ein Polyeder in der Dimension $\binom{n+p}{n}$. Nun wendet man darauf die Konstruktionen aus Satz 2.6 bzw. Proposition 2.5 an und abschließend substituiert man wieder zurück in den Ursprungsraum. So erhält man

Korollar 2.8 ([BGH05, Corollary 1.4]). *Jede elementare abgeschlossene semi-algebraische Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ vom Maximalgrad p kann durch höchstens $2\binom{n+p}{n}$ Polynome konstruktiv beschrieben werden.*

Ausgangspunkt einer konstruktiven Beschreibung von Polynomen, die ein Polytop darstellen, ist im 2-dimensionalen, wie auch im allgemeinen Falle, eine \mathcal{H} -Darstellung des Polytops

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : b_i - a_i x \geq 0, 1 \leq i \leq m\}.$$

Sucht man nun ein Polynom, das mit P assoziiert ist, dann gibt es einen sehr offensichtlichen Kandidaten, nämlich das Produkt der Facetten-definierenden Ungleichungen:

$$p_{n-1}(x) = \prod_{i=1}^m (b_i - a_i x). \quad (2.4)$$

Der Nichtnegativitätsbereich von $p_{n-1}(x)$, d.h. $\{x \in \mathbb{R}^n : p_{n-1}(x) \geq 0\}$, besteht aus P , den affinen Hüllen der Facetten, und allen Punkten $x \in \mathbb{R}^n$, die eine gerade Anzahl der linearen Restriktionen $b_i - a_i x$ verletzen, d.h. für die $b_i - a_i x < 0$ gilt (siehe Abbildung 4).

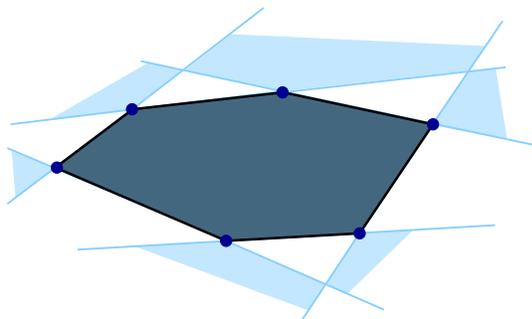


Abbildung 4: $\{x \in \mathbb{R}^2 : p_1(x) \geq 0\}$

Die bekannten Konstruktionen beruhen nun darauf, die durch dieses Polynom zusätzlich zu P entstandenen Bereiche durch die weiteren Polynome wieder abzuschneiden, wie im Beispiel von C_2^* (siehe (2.3)).

Diese Vorgehensweise ist zwar sehr naheliegend, aber in Anbetracht der (einfachen) \mathcal{P} -Darstellungen von Würfel und Simplex, erscheint es zumindest ein wenig fragwürdig, ob diese Methode zu minimalen (bzgl. der Anzahl der Polynome) \mathcal{P} -Darstellungen führen kann. Speziell im Falle des Würfels beruht die \mathcal{P} -Darstellung auf einer Aufteilung der Facetten in Gruppen, so dass sich die durch die Multiplikation von linearen Ungleichungen entstandenen zusätzlichen Bereiche gegenseitig ausschließen. Beim Simplex tritt der gleiche Effekt auf, hier benutzt man aber auch noch Ungleichungen, die niederdimensionale Seiten beschreiben.

Ein weiteres Beispiel, bei dem dieser Partitionierungsansatz zum Erfolg führt, ist das 3-dimensionale Kreuzpolytop $C_3^* = \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 : |x| + |y| + |z| \leq 1\}$, das sich trivialerweise

mit 4 Polynomen beschreiben lässt. Aber es ist auch eine Beschreibung mit drei Polynomen möglich [Bos05]:

$$C_3^* = \left\{ \begin{aligned} &(1 - (x + y + z))(1 - (-x - y + z))(1 - (-x + y - z))(1 - (x - y - z)) \geq 0, \\ &(1 - (-x - y - z))(1 - (x + y - z))(1 - (x - y + z))(1 - (-x + y + z)) \geq 0, \\ &1 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0 \end{aligned} \right\}.$$

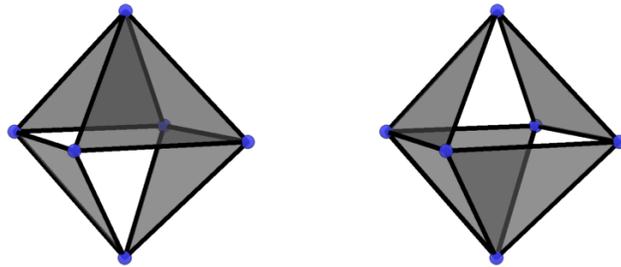


Abbildung 5: Auswahl von Facetten für C_3^*

Hier werden die Facetten-definierenden Ungleichungen derart in zwei Gruppen eingeteilt, dass je zwei Facetten in einer Gruppe nur eine Ecke gemeinsam haben (siehe Abbildung 5). Die durch die beiden ersten Ungleichungen zusätzlich entstandenen Bereiche lassen sich als Kegel an den Ecken beschreiben, die durch die letzte Ungleichung, eine Kugel mit Radius 1 und Mittelpunkt 0, abgeschnitten werden.

Inwieweit sich solche kombinatorischen Partitionierungsmethoden auch bei anderen Polytopen oder in höheren Dimensionen ausnutzen lassen, wird zur Zeit untersucht.

3 Konstruktion in Dimension 2

Betrachtet man ein reguläres n -Eck in der Ebene, so lassen sich die durch $p_1(x) \geq 0$ (siehe (2.4)) zusätzlich entstandenen Bereiche zum Beispiel durch den Umkreis des n -Eckes abschneiden; also mittels einer Ungleichung der Form $1 - p_0(x) \geq 0$, wobei $p_0(x)$ ein streng konvexes Polynom ist, und $p_0(x) = 1$ für alle Ecken des Polygons gilt.

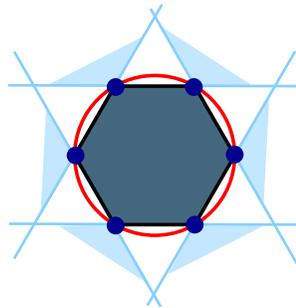


Abbildung 6: Reguläres Sechseck mit Umkreis

Findet man für ein beliebiges beschränktes Polygon ein Polynom $p_0(x)$ mit diesen Eigenschaften, dann ist $\{x \in \mathbb{R}^2 : p_1(x) \geq 0, 1 - p_0(x) \geq 0\}$ eine \mathcal{P} -Darstellung des Polygons.

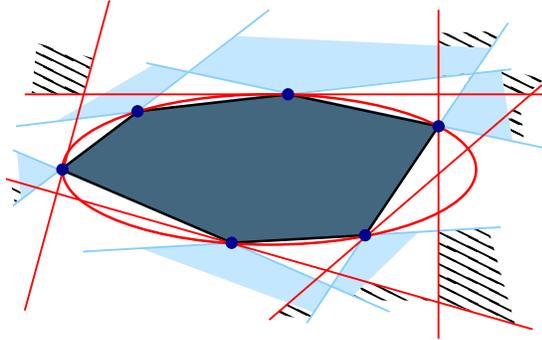


Abbildung 7: $P = \{x \in \mathbb{R}^2 : p_1(x) \geq 0, 1 - p_0(x) \geq 0\}$

Wie man konstruktiv ein solches $p_0(x)$ bestimmt, ist von Bernig [Ber98] gezeigt worden. Dazu seien v_1, \dots, v_m die Ecken von P , und für jede Ecke v_i seien $a_i \in \mathbb{R}^2, \beta_i \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass $a_i v_i - \beta_i = 1$ und $|a_i v_j - \beta_i| < 1$ für $j \neq i$. Die Gerade $\{x \in \mathbb{R}^2 : a_i x = 1 + \beta_i\}$ ist also insbesondere eine Stützgerade an der Ecke v_i . Für positive Skalare λ_i und $l \in \mathbb{N}$ ist das Polynom

$$p_0(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i (a_i x - \beta_i)^{2l}$$

streng konvex, und gesucht sind Parameter λ_i, l , so dass $p_0(v_i) = 1$ für alle Ecken v_i .

Aufgrund der Wahl von a_i, β_i ist die Matrix A_l mit Einträgen $(a_i v_j - \beta_i)^{2l}, 1 \leq i, j \leq m$, für großes l im Wesentlichen die Einheitsmatrix. Folglich lässt sich für hinreichend großes l der m -dimensionale 1-Vektor, d.h. alle Einträge sind 1, als positive Kombination der Spalten von A_l schreiben. Dies bedeutet aber gerade $p_0(v_j) = 1, 1 \leq j \leq m$.

In Abhängigkeit von den Werten $a_i v_j - \beta_i$ und der sich daraus ergebenden Norm der Matrix A_l kann solch ein hinreichend großes l auch effektiv bestimmt werden.

Es sei bemerkt, dass im Gegensatz zum Polynom $p_1(x)$, dessen Grad gleich der Kantenzahl ist, der Grad von $p_0(x)$ nicht nur von kombinatorischen Größen des Polygons bestimmt wird, sondern von metrischen. In [Ber98, Proposition 3.3.1] wird für vorgegebenes p ein 5-Eck angegeben, so dass der Grad von $p_0(x)$ mindestens p ist. Weiterhin sei bemerkt, dass dieser Ansatz mittels der im vorherigen Abschnitt erwähnten projektiven Transformation auch für unbeschränkte Polygone nur zwei Polynome liefert. Dies liegt im Wesentlichen daran, dass alle Summanden in $p_0(x)$ den gleichen Grad besitzen.

Die Konstruktion eines streng konvexen Polynoms $p_0(x)$, das durch die Ecken eines Polytops führt, kann in jeder Dimension vorgenommen werden. Somit ist es naheliegend, diesen Ansatz auf höhere Dimensionen, bzw. zunächst einmal auf Dimension 3 zu verallgemeinern. Dies werden wir im Folgenden an dem Beispiel des Oktaeders C_3^* versuchen.

Man beginnt zunächst wieder mit dem Polynom $p_2(x)$, gegeben durch das Produkt der Facetten-definierenden Ungleichungen

$$p_2(x, y, z) = (1 - (x + y + z)^2) (1 - (-x + y + z)^2) (1 - (x - y + z)^2) (1 - (x + y - z)^2).$$

Der Nichtnegativitätsbereich dieses Polynoms schließt nun auch gewisse Bereiche „oberhalb“ der insgesamt 12 Kanten mit ein. Diese versucht man abzuschneiden, indem man das

Produkt von Stützhyperbenen an die Kanten betrachtet, also etwa

$$p_1(x, y, z) = (1 - (x + y)^2) (1 - (x + z)^2) (1 - (y + z)^2) (1 - (x - y)^2) (1 - (x - z)^2) (1 - (y - z)^2).$$

Abschließend wählt man ein streng konvexes Polynom durch die Ecken des Polytops, um die noch verbliebenen überflüssigen Bereiche „oberhalb“ der Ecken abzuschneiden. Hier könnte man es z.B. mit der Kugel vom Radius 1 und Mittelpunkt 0 versuchen. Betrachtet man nun den Nichtnegativitätsbereich der ersten beiden Polynome $S(p_1, p_2)$ in der Ebene $\{z = 2y\}$, so ergibt sich eine Situation, wie sie in Abbildung 8 skizzenhaft dargestellt ist.

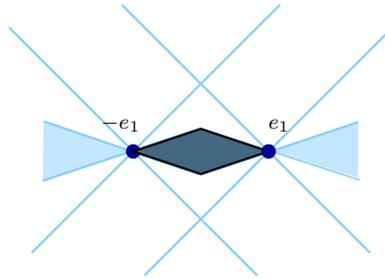


Abbildung 8: $S(p_1, p_2) \cap \{z = 2y\}$

Die hell dargestellten Geraden und Dreiecke, sowie der dunklere innere Bereich, der den Schnitt des Oktaeders mit der Ebene $\{z = 2y\}$ darstellt, gehören zu $S(p_1, p_2)$. Der Nichtnegativitätsbereich des dritten Polynoms muss also nun den inneren Bereich einschließen, aber die Geraden und Dreiecke mit Ausnahme der Punkte $\pm e_1$ ausschließen. Dies kann aber auf keinen Fall von einer in den Punkten $\pm e_1$ glatten Kurve geleistet werden. Ob man überhaupt zwei Polynome p_0, p_1 wählen kann, die zusammen mit p_2 das Oktaeder beschreiben, ist offen.

Betrachtet man die Situation in Abbildung 8 etwas genauer, so erkennt man, dass sich die überflüssigen Bereiche an einer Ecke mit zwei Polynomen, die einen Kegel beschreiben, entfernen lassen. In diesem Beispiel kann man etwa für die Ecke $-e_1$ die beiden Polynome

$$p_{-e_1,1}(x, y, z) = 1 + x, \quad \text{und} \quad p_{-e_1,2}(x, y, z) = 2(1 + x)^2 - (y^2 + z^2)$$

wählen.

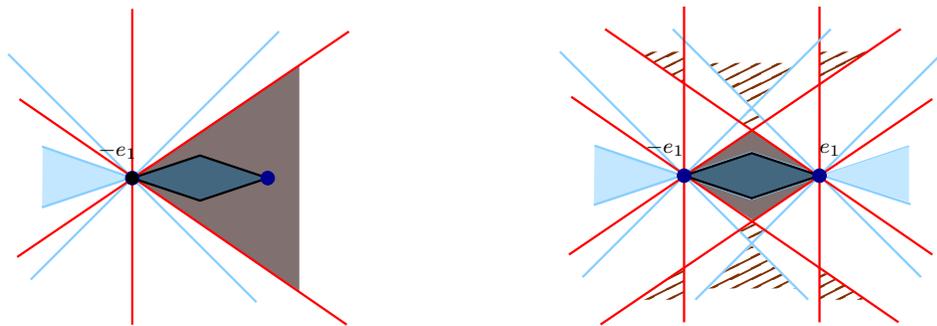


Abbildung 9: Abschneiden mit Kegeln

Der Kegel $S(p_{-e_1,1}, p_{-e_1,2})$ mit Spitze $-e_1$, dargestellt als dunkler Bereich in dem linken Bild von Abbildung 9, hat zwei wichtige Eigenschaften. Einerseits enthält dieser Kegel den sogenannten Seitenkegel (siehe auch (4.1))

$$C_{-e_1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x \pm y + \pm z \leq 1\} \quad (3.1)$$

von C_3^* in der Ecke $-e_1$, gegeben durch alle Facetten-definierenden Ungleichungen, die $-e_1$ enthalten. Zum Anderen approximiert $S(p_{-e_1,1}, p_{-e_1,2})$ in einem später noch zu präzisierenden Sinne diesen Seitenkegel auch hinreichend gut. Die Konstruktion solcher Kegel für beliebige Seiten ist der Schlüssel in der allgemeinen n -dimensionalen Konstruktion in Abschnitt 4. Zurück zum Oktaeder: Diese Kegel bzw. Polynome $p_{\pm e_i,1}, p_{\pm e_i,2}$ werden nun für jede Ecke $\pm e_i$ bestimmt und miteinander multipliziert. Man erhält so für die Ecken zwei Polynome der Form

$$p_{0,1} = \prod_{i=1}^3 p_{\pm e_i,1} \quad \text{und} \quad p_{0,2} = \prod_{i=1}^3 p_{\pm e_i,2}.$$

Auch hierbei entstehen wieder durch die Multiplikation unerwünschte Bereiche, wie sie auf dem rechten Bild in Abbildung 9 als straffierte Flächen angedeutet sind. Man „sieht“ aber nun, dass diese Bereiche, d.h. die Punkte in $S(p_2, p_1, p_{0,1}, p_{0,2}) \setminus C_3^*$ einen positiven Abstand zu C_3^* haben. Wie man solche Punkte im Allgemeinen mit Hilfe eines streng konvexen Polynoms abschneiden kann, wird insbesondere im nächsten Abschnitt beschrieben (siehe Lemma 4.1). Insgesamt erhält man so eine Beschreibung von C_3^* mit 5 Polynomen. Wir haben schon gesehen, dass es auch mit drei sehr einfachen Polynomen möglich ist, aber diese hier beispielhaft beschriebene Vorgehensweise kann auf jedes 3-dimensionale Polytop angewendet werden, und sie soll auch nur die im nächsten Abschnitt behandelte n -dimensionale Konstruktion vorbereiten.

Abschließend sei bemerkt, dass dieser Ansatz, durch zusätzliche Polynomungleichungen die unerwünschten Punkte von dem Polytop weg zu treiben, bereits in der Ebene von vom Hofe [vH92] benutzt wurde. Er konstruierte mit dieser Methode drei Polynomungleichungen, die ein Polygon beschreiben. Bei dieser Konstruktion wählt man neben p_1 als zweites Polynom $p_{0,1}$, das Produkt von Stützgeraden an die Ecken des Polygons P . Dadurch ist gewährleistet, dass die Punkte in $S(p_1, p_{0,1}) \setminus P$ durch ein zusätzliches Polynom abgeschnitten werden können (siehe Abbildung 10).

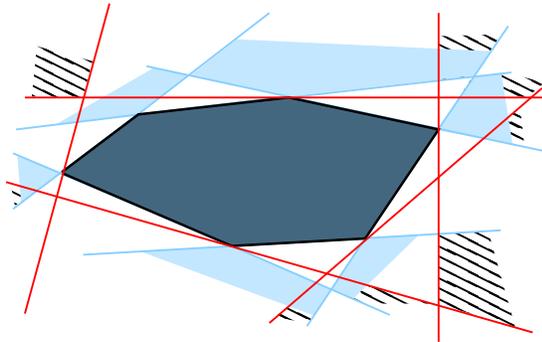


Abbildung 10: $S(p_1, p_{0,1})$

4 Konstruktion in Dimension n

Für ein beliebiges Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^n : b_i - a_i x \geq 0, 1 \leq i \leq m\} \subseteq \mathbb{R}^n$, und eine Seite F sei $I_F = \{i \in \{1, \dots, m\} : b_i - a_i x = 0, \text{ für alle } x \in F\}$ die Menge der aktiven Bedingungen in F .

$$C_F = \{x \in \mathbb{R}^n : b_i - a_i x \geq 0, i \in I_F\} \quad (4.1)$$

heißt *Seitenkegel* der Seite F . Die Menge aller k -Seiten eines Polyeders wird mit \mathcal{F}_k bezeichnet.

Bevor wir die Einzelheiten der Konstruktion der $(2n - 1)$ vielen Polynomungleichungen aus Satz 2.6 beschreiben, soll zunächst die grobe Vorgehensweise für ein n -dimensionales Polytop skizziert werden: Für eine k -Seite F werden zwei Polynome $p_{F,1}, p_{F,2}$ konstruiert, so dass der Seitenkegel C_F durch die semi-algebraische Menge $S(p_{F,1}, p_{F,2})$, die wiederum einen Kegel darstellt, approximiert wird. Anschließend wird das Produkt über alle k -Seiten der beiden Polynome $p_{F,1}, p_{F,2}$ genommen, so dass man für die Menge der k -Seiten jeweils zwei Polynome erhält,

$$p_{k,1} = \prod_{F \in \mathcal{F}_k} p_{F,1} \quad \text{und} \quad p_{k,2} = \prod_{F \in \mathcal{F}_k} p_{F,2}.$$

Dabei sind die Polynome $p_{F,1}$ von der Form $b_F - a_F x$, wobei $H(a_F, b_F)$ eine Stützhyperebene der Seite F ist. Im Falle von Facetten und $(n - 2)$ -Seiten kann auf die Polynome $p_{F,2}$ verzichtet werden; vergleiche die Konstruktion im vorherigen Abschnitt bei C_3^* .

Die Approximation der Seitenkegel durch die Mengen $S(p_{F,1}, p_{F,2})$ garantiert nun, dass alle Punkte, die dieses System von insgesamt $2n - 2$ Polynomungleichungen erfüllen, aber nicht zu dem Polytop P gehören, positiven Abstand zu P besitzen. Mit Hilfe eines weiteren Polynoms werden diese Punkte dann abgeschnitten, und man hat $2n - 1$ Polynome gefunden, die das Polytop beschreiben.

Entscheidend bei der Konstruktion der Polynome $p_{F,2}$ wird sein, dass für zwei k -Seiten F und G , die eine gemeinsame Ecke haben, die Menge $S(p_{F \cap G,1}, p_{F \cap G,2})$ im Wesentlichen durch das Innere der beiden Mengen $S(p_{F,1}, p_{F,2})$ und $S(p_{G,1}, p_{G,2})$ überdeckt wird (siehe Korollar 4.5). Um nun nicht immer zwischen Seiten zu unterscheiden, die eine oder keine gemeinsame Ecke haben, ist es vorteilhaft das Polytop P in kanonischer Weise in einen spitzen polyedrischen Kegel $C \subset \mathbb{R}^{n+1}$ einzubetten, und zwar mittels der Homogenisierung

$$C = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : b_i x_{n+1} - a_i(x_1, \dots, x_n) \geq 0, 1 \leq i \leq m, x_{n+1} \geq 0\}. \quad (4.2)$$

Für $x_{n+1} = 1$ erhält man gerade wieder P . Die Einbettung in einen spitzen Kegel hat auch den Vorteil, dass der letzte Schritt der Konstruktion, nämlich die Approximation des Polytops durch eine Polynomungleichung, sich als Approximation des Seitenkegels von C in der Ecke 0 beschreiben lässt.

Bevor wir den Seitenkegeln von C zwei Polynome zuordnen, benötigen wir zunächst ein Lemma über die Approximierbarkeit eines Polytops durch ein streng konvexes Polynom. Dazu sei B_n die n -dimensionale Einheitskugel, d.h. die Kugel mit Radius 1 und Mittelpunkt 0, und für zwei Mengen $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ bezeichne

$$X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\}$$

die Minkowski-Addition. Die Stützfunktion einer kompakten Mengen sei mit h_K bezeichnet, also

$$h_K(u) = \max\{u x : x \in K\}, \quad u \in \mathbb{R}^n,$$

und der Durchmesser von K , d.h. der maximale Abstand zwischen zwei Punkten aus K , sei mit $\text{diam}(K)$ bezeichnet.

Die Approximation von konvexen Flächen durch affine Hyperflächen hat eine lange Tradition in der Konvexgeometrie (siehe z.B. [Ham63, Fir74, Wei75]). Hier benötigen wir lediglich (siehe [GH03, Lemma 2.6])

Lemma 4.1. *Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n : b_i - a_i x \geq 0, 1 \leq i \leq m\}$ ein n -dimensionales Polytop. Für $1 \leq i \leq m$ sei*

$$w_i(x) = \frac{2a_i x - h_P(a_i) + h_P(-a_i)}{h_P(a_i) + h_P(-a_i)}.$$

Für $\epsilon > 0$, $k > \ln(m)/(2 \ln(1 + \frac{2\epsilon}{(n+1)\text{diam}(P)}))$ sei

$$p_\epsilon(x) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{m} [w_i(x)]^{2k} \quad \text{und} \quad K_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : p_\epsilon(x) \leq 1\}.$$

Dann gilt $P \subset K_\epsilon \subset P + \epsilon B_n$.

Dieses Lemma ermöglicht es uns sofort, den obigen Kegel C (4.2) durch zwei Polynomgleichungen zu approximieren. Dazu betrachtet man das Polynom p_ϵ aus Lemma 4.1 für den Schnitt $C \cap \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = 1\}$. Nun homogenisiert man diese Approximation bzw. das entsprechende Polynom. Dabei geht p_ϵ über in ein Polynom $p_{0,\epsilon,2} \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_{n+1}]$. Zusammen mit dem „Stützpolynom“ $p_{0,1}(x) = e_{n+1} x$ in der Ecke 0 erhält man im Wesentlichen die beiden Polynome, so dass die Menge $S(p_{0,1}, p_{0,\epsilon,2})$ den Kegel C approximiert. Arbeitet man diesen Ansatz für einen beliebigen spitzen polyedrischen Kegel aus, so ergibt sich folgendes Resultat.

Lemma 4.2. *Sei K ein l -dimensionaler polyedrischer Kegel mit Spitze 0, und sei $p_{0,1}(x) = u_0 x$, $x \in \mathbb{R}^l$, wobei u_0 innerer Normalenvektor der Länge 1 einer Stützhyperebene von K in 0 ist. Für $\epsilon \in (0, 1/2]$ kann ein Polynom $p_{0,\epsilon,2} \in \mathbb{R}[x]$ konstruiert werden, so dass*

- i) $\{x + \epsilon(u_0 x)B_l : x \in K\} \subset S(p_{0,1}, p_{0,\epsilon,2}) \subset \{x + \omega_K \epsilon(u_0 x)B_l : x \in K\}$,
- ii) $\{x \in \mathbb{R}^l : p_{0,1}(x) = p_{0,\epsilon,2}(x) = 0\} = \{0\}$,
- iii) $\{x + \epsilon(u_0 x)B_l : x \in K, p_{0,1}(x) > 0\} \subset \{x \in \mathbb{R}^l : p_{0,\epsilon,2}(x) > 0\}$.

Hierbei ist $\omega_K \geq 1$ eine Konstante, die nur von K abhängt.

Als Konstante ω_K kann etwa das Verhältnis von Umkugelradius zu Inkugelradius des Polytops $\{x \in \mathbb{R}^l : u_0 x = 1\} \cap K$ gewählt werden.

Eigenschaft i) beschreibt gerade die Approximation von K durch $S(p_{0,1}, p_{0,\epsilon,2})$, die Bedeutung der beiden weiteren Eigenschaften werden gleich erkenntlich. Zunächst aber übertragen wir dieses Resultat auf die Seitenkegel unseres Kegels C (siehe 4.2). Für eine l -Seite F von C ist C_F ein $(n+1)$ -dimensionaler Kegel, der einen l -dimensionalen Teilraum, nämlich $\text{lin}F$, enthält. Dabei bezeichnet $\text{lin}F$ die *lineare Hülle* von F . Der Schnitt von C_F mit dem orthogonalen Komplement von $\text{lin}F$ ist somit ein $(n+1-l)$ -dimensionaler spitzer polyedrischer Kegel, auf den wir das vorherige Resultat anwenden können.

Dazu bezeichne u_F im Folgenden für eine Seite F von C einen inneren Normalenvektor einer Stützhyperebene von C in F der Länge 1.

Korollar 4.3. Sei F eine l -Seite von C , und sei $p_{F,1} = u_F x$, $x \in \mathbb{R}^{n+1}$. Für $\varepsilon \in (0, 1/2]$ kann ein Polynom $p_{F,\varepsilon,2} \in \mathbb{R}[x]$ konstruiert werden, so dass

- i) $\{x + \varepsilon(u_F x)B_{n+1} : x \in C_F\} \subset S(p_{F,1}, p_{F,\varepsilon,2})$
 $\subset \{x + \omega_{C_F} \varepsilon(u_F x)B_{n+1} : x \in C_F\}$,
- ii) $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : p_{F,1} = p_{F,\varepsilon,2} = 0\} = \text{lin}(F)$,
- iii) $\{x + \varepsilon(u_F x)B_{n+1} : x \in C_F, p_{F,1}(x) > 0\} \subset \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : p_{F,\varepsilon,2}(x) > 0\}$,

wobei $\omega_{C_F} \geq 1$ eine Konstante ist, die nur von C abhängt.

Im Falle einer Facette, d.h. einer n -dimensionalen Seite von C , ist der Schnitt von C_F mit dem orthogonalen Komplement von F ein 1-dimensionaler Kegel, so dass dann

$$p_{F,\varepsilon,2}(x) = p_{F,1}(x) = u_F x \quad (4.3)$$

gewählt werden kann. Das Ziel ist es nun, die Parameter ε_k , $k = 0, \dots, n$, so zu bestimmen, dass die Polynome

$$p_{k,1}(x) = \prod_{F \in \mathcal{F}_k} p_{F,1}(x), \quad p_{k,2}(x) = \prod_{F \in \mathcal{F}_k} p_{F,\varepsilon_k,2}(x), \quad k = 0, \dots, n \quad (4.4)$$

dem Kegel C beschreiben. Da nach Konstruktion $C \subseteq S(p_{k,1}(x), p_{k,2}(x))$, $k = 0, \dots, n$, müssen wir verstehen, wie wir mit Hilfe der Parameter ε_k erreichen können, dass

$$S(p_{k,1}, p_{k,2}, k = 0, \dots, n) \setminus C = \emptyset.$$

Sei dazu $y \in S(p_{k,1}, p_{k,2}, k = 0, \dots, n) \setminus C$. Dann gilt aber für ein k , etwa $k = n - 1$, und eine entsprechende k -Seite F von C : $p_{F,1}(y) < 0$. Da aber andererseits $p_{k,1}(y) \geq 0$, gibt es mindestens noch eine k -Seite G mit $p_{G,1}(y) \leq 0$. Somit liegt es nahe, den Schnitt $F \cap G$ genauer zu betrachten. Da $C_{F \cap G} \subset C_F \cap C_G$ erhält man als einfache geometrische Beobachtung

Lemma 4.4. Seien F, G k -Seiten von C , und sei $\varepsilon_k \in (0, 1/2]$. Dann können wir ein $\varepsilon_{F \cap G} \in (0, 1/2]$ bestimmen, so dass

$$\begin{aligned} \{x + \varepsilon_{F \cap G}(u_{F \cap G} x)B_{n+1} : x \in C_{F \cap G}\} &\subset \{x + \varepsilon_k(u_F x)B_{n+1} : x \in C_F, u_F x > 0\} \\ &\cup \{x + \varepsilon_k(u_G x)B_{n+1} : x \in C_G, u_G x > 0\} \\ &\cup (\text{lin}(F) \cap \text{lin}(G)). \end{aligned}$$

Entscheidend ist nun, dass sich aufgrund der Eigenschaften i) – iii) aus Korollar 4.3 diese Inklusion durch unsere Polynome ausdrücken lässt.

Korollar 4.5. Wir können positive Konstanten $\varepsilon_k \leq 1/2$, $0 \leq k \leq n$ bestimmen, so dass für $k \in \{0, \dots, n\}$ und für jedes Paar von verschiedenen k -Seiten F, G von C gilt

$$\begin{aligned} S(p_{F \cap G,1}, p_{F \cap G, \varepsilon_{\dim(F \cap G)}, 2}) &\subset \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : p_{F,1}(x) > 0, p_{F,\varepsilon_k,2}(x) > 0\} \\ &\cup \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : p_{G,1}(x) > 0, p_{G,\varepsilon_k,2}(x) > 0\} \\ &\cup \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : p_{F,1}(x) = p_{F,\varepsilon_k,2}(x) = p_{G,1}(x) = p_{G,\varepsilon_k,2}(x) = 0\}. \end{aligned}$$

Das Korollar besagt, dass der Kegel $S(p_{F \cap G, 1}, p_{F \cap G, \varepsilon_{\dim(F \cap G)}, 2})$, der den Seitenkegel von $F \cap G$ approximiert, bis auf $\text{lin}(F) \cap \text{lin}(G)$ durch das Innere der beiden Kegel $S(p_{F, 1}, p_{F, \varepsilon_k, 2})$ und $S(p_{G, 1}, p_{G, \varepsilon_k, 2})$ überdeckt wird. Dies impliziert, dass ein Punkt $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit z.B. $p_{F, 1}(y) < 0$ und $p_{G, 1}(y) \leq 0$, nicht in $S(p_{F \cap G, 1}, p_{F \cap G, \varepsilon_{\dim(F \cap G)}, 2})$ liegt. Ist $F \cap G = \{0\}$, dann zeigt dies sofort, dass y nicht in C enthalten sein kann. Im folgenden Beweis des Satzes 4.6 werden wir genau dieses Argument iterativ verwenden.

Vorher sei aber bemerkt, dass wir aufgrund von (4.3) $\varepsilon_n = 1/2$ wählen können. Da zudem jede $(n-1)$ -Seite des Kegels C der Schnitt von genau zwei n -Seiten ist, können wir für jede $(n-1)$ -Seite von G ebenfalls annehmen

$$\varepsilon_{n-1} = 1/2 \quad \text{und} \quad p_{G, \varepsilon_{n-1}, 2}(x) = p_{G, 1}(x) = u_G x, \quad (4.5)$$

ohne die Gültigkeit von Korollar 4.5 zu verletzen.

Satz 4.6 ([BGH05]). *Seien $\varepsilon_k, k = 0, \dots, n$, wie in Korollar 4.5 gewählt, und seien $p_{k, 1}, p_{k, 2}$ die entsprechenden Polynome aus (4.4). Dann gilt*

$$C = S(p_{k, 1}, p_{k, 2}, k = 0, \dots, n).$$

Beweis. Die Inklusion \subseteq gilt trivialerweise; sei also $y \in S(p_{k, 1}, p_{k, 2}, k = 0, \dots, n) \setminus C$. Dann existiert sicherlich eine verletzte Facetten-definierende Ungleichung, etwa $p_{F, 1}(y) < 0$ mit $F \in \mathcal{F}_n$. Daher betrachten wir nun den minimalen Index $l \in \{0, \dots, n\}$, für den einer der Faktoren von $p_{l, 1}(y)$ oder $p_{l, 2}(y)$ negativ ist. Da $p_{0, 1}$ und $p_{0, 2}$ nur aus jeweils einem Polynom bestehen, ist $1 \leq l \leq n$.

Sei also $F \in \mathcal{F}_l$ mit $p_{F, 1}(y) < 0$ oder $p_{F, \varepsilon_l, 2}(y) < 0$. Nun sind $p_{l, 1}(y) \geq 0, p_{l, 2}(y) \geq 0$, und somit gibt es eine l -Seite G mit $p_{G, 1}(y) \leq 0$, falls $p_{F, 1}(y) < 0$, bzw. $p_{G, \varepsilon_l, 2}(y) \leq 0$, falls $p_{F, \varepsilon_l, 2}(y) < 0$. Damit ist aber y nicht enthalten in der rechte Seite der Inklusion von Korollar 4.5 und folglich

$$y \notin S(p_{F \cap G, 1}, p_{F \cap G, \varepsilon_{\dim(F \cap G)}, 2}).$$

Dies widerspricht aber der Minimalität von l . □

Unter Beachtung von (4.3) und (4.5) haben wir so eine Darstellung des $(n+1)$ -dimensionalen Kegels C mit $2n$ Polynomen gefunden. Da für das Polytop

$$P = C \cap \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = 1\}$$

das Polynom $p_{0, 1} = u_0 x$ obsolet ist, erhalten wir Theorem 2.6.

Die bei der Konstruktion der Polynome $p_{F, 1}, p_{F, \varepsilon, 2}$ benötigten Konstanten lassen sich für rationale Eingabedaten $a_i \in \mathbb{Q}^n, b_i \in \mathbb{Q}$ algorithmisch explizit berechnen (siehe [Bos05]), und somit lässt sich diese Konstruktion auch algorithmisch durchführen. Jedoch ist nicht nur der Grad der dabei entstehenden Polynome extrem hoch, sondern der rechnerische Aufwand ist ebenfalls enorm. Auch aus diesem Grunde bieten \mathcal{P} -Darstellungen von Polytopen mit möglichst wenigen Polynomen keinen praktikablen alternativen Ansatz zum Lösen von Optimierungsproblemen. Wie aber anfangs schon erwähnt, sollte dieses Resultat vielmehr verstanden werden als ein erster Schritt bei der Entwicklung von Polynomungleichungssystemen mit vorgeschriebenem Maximalgrad, die ein Polyeder oder allgemeinere Mengen darstellen oder approximieren.

Schlussbemerkung. Ich danke dem Referenten für einige wichtige Hinweise und Anregungen.

Literatur

- [ABR96] Carlos Andradas, Ludwig Bröcker, and Jesús M. Ruiz, *Constructible sets in real geometry*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)*, vol. 33, Springer, Berlin, 1996.
- [BCR98] Jacek Bochnak, Michel Coste, and Marie-Françoise Roy, *Real algebraic geometry*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)*, vol. 36, Springer, Berlin, 1998.
- [Ber98] Alexander Bernig, *Constructions for the theorem of Bröcker and Scheiderer*, Diplomarbeit, Universität Dortmund, 1998.
- [BGH05] Hartwig Bosse, Martin Grötschel, and Martin Henk, *Polynomial inequalities representing polyhedra*, *Math. Prog. (A)* **103** (2005), no. 1, 35 – 44.
- [BM98] Jérôme Burési and Louis Mahé, *Reducing inequalities with bounds*, *Math. Z.* **227** (1998), no. 2, 231–243.
- [Bos03] Hartwig Bosse, *Describing polyhedra by polynomial inequalities*, Diplomarbeit, Technische Universität Berlin, 2003.
- [Bos05] ———, *Representing polyhedra by few polynomial inequalities*, Dissertation, Technische Universität Berlin, 2005, <http://opus.kobv.de/tuberlin/volltexte/2006/1203/>.
- [BPR06] Saugata Basu, Richard Pollack, and Marie-Françoise Roy, *Algorithms in real algebraic geometry. 2nd ed.*, *Algorithms and Computation in Mathematics*, vol. 10, Springer, Berlin, 2006.
- [Brö84] Ludwig Bröcker, *Minimale Erzeugung von Positivbereichen*, *Geom. Dedicata* **16** (1984), 335–350.
- [Brö91] Ludwig Bröcker, *On basic semialgebraic sets*, *Exposition. Math.* **9** (1991), no. 4, 289–334.
- [Fir74] William J. Firey, *Approximating convex bodies by algebraic ones*, *Arch. Math.* **25** (1974), 424–425.
- [GH03] Martin Grötschel and Martin Henk, *The representation of polyhedra by polynomial inequalities*, *Discrete Comput. Geom.* **29** (2003), no. 4, 485–504.
- [GLS93] Martin Grötschel, László Lovász, and Alexander Schrijver, *Geometric algorithms and combinatorial optimization*, *Algorithms and Combinatorics*, vol. 2, Springer, Berlin, 1993.
- [Ham63] Preston C. Hammer, *Approximation of convex surfaces by algebraic surfaces*, *Mathematika* **10** (1963), 64–71.
- [HM06] Martin Henk and Bettina Matzke, *Representing polygons with polynomials of fixed degree*, in preparation, 2006.
- [Las04] Jean B. Lasserre, *SDP-relaxations for polynomial programming*, *SIAG/Opt Views-and-News* **15** (2004), no. 2, 1–7.

- [MS71] Peter McMullen and Geoffrey C. Shephard, *Convex polytopes and the upper bound conjecture*, Cambridge University Press, London, 1971.
- [Par03] Pablo A. Parrilo, *Semidefinite programming relaxations for semialgebraic problems*, Math. Program. (B) **96** (2003), no. 2, 293–320.
- [Sch89] Claus Scheiderer, *Stability index of real varieties*, Inventiones Math. **97** (1989), no. 3, 467–483.
- [Sch98] Alexander Schrijver, *Theory of linear and integer programming*, Wiley, Chichester, 1998.
- [vH92] Günter vom Hofe, *Beschreibung von ebenen konvexen n -Ecken durch höchstens drei algebraische Ungleichungen*, Dissertation, Universität Dortmund, 1992.
- [Wei75] Wolfgang Weil, *Einschachtelung konvexer Körper*, Arch. Math. **26** (1975), no. 6, 666–669.
- [Zie95] Günter M. Ziegler, *Lectures on polytopes*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 152, Springer, New York, 1995.